Составить программу-функцию подсчета количества ξ(m) разбиений натурального числа m, то есть его представления в виде суммы натуральных чисел.

Решение. Пусть, например, m=6. Тогда разбиениями m являются его представления в виде:

6;
5+1;
4+2, 4+1+1;
3+3, 3+2+1, 3+1+1+1;
2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1;
1+1+1+1+1+1;

Таким образом, ξ(m)=11 и понятно, что простым перебором возможных случаев уже при m>10 справиться с задачей достаточно сложно.

Для решения исходной задачи перейдем к рассмотрению обобщенной задачи. Составить программу-функцию подсчета количества P(m,n) разбиений натурального числа m со слагаемыми, не превосходящими n. Ясно, что ξ(m)=P(m,m). Поэтому, достаточно научиться вычислять значения функции P(m,n). Но для неё нетрудно выделить рекурсивную базу и указать правило декомпозиции. Сделать это можно исходя из следующих вполне прозрачных свойств этой функции.

1. P(m,1)=1 – существует только одно разбиение m, в котором слагаемые не превосходят единицы, а именно: m=1+1+…+1.
2. P(1,n)=1 – число единица имеет только одно представление при любом n.
3. P(m,n)=P(m,m) при n>m – слагаемые, большие m в разбиениях отсутствуют.
4. P(m,m)=P(m,m–1)+1 – существует лишь одно разбиение со слагаемым равным m. Все иные разбиения имеют слагаемые не превосходящие m–1.
5. P(m,n)=P(m,n–1)+P(m–n,n) (n<m). Обоснование этого соотношения проводится так. Все разбиения m на сумму слагаемых, не превосходящих n можно разбить на два непересекающихся класса: суммы, не содержащие n в качестве слагаемого и суммы, содержащие такое n. Количество элементов первого класса равно P(m,n–1), а количество элементов второго класса подсчитаем так. Без учета слагаемого n суммы элементов второго класса равны m–n. Значит их общее количество равно P(m–n,n) и, следовательно, общее количество элементов второго класса также равно этой величине. Тем самым свойство 5 установлено.

Первые два свойства определяют базу рекурсии, а три следующие задают декомпозицию. Строго в соответствии с этими утверждениями и составлена рекурсивная программа-функция deco(n,m) для вычисления величины P(m,n).

$$deco(m,n) := \left| \begin{array}{l} 1 \quad if \quad (n=1)+(m=1) \\ \left| \begin{array}{l} deco(m,m) \quad if \quad n>m \\ \left| \begin{array}{l} deco(m,m-1)+1 \quad if \quad m=n \\ deco(m,n-1)+deco(m-n,n) \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. ,$$

$\xi(m) := P(m,m)$.

program P6_5plus1;

```
function deco(m,n:integer):integer;
begin if (n=1) or(m=1)then deco:=1
else if n>m then deco:=deco(m,m)
else if m=n then deco:=deco(m,m-1)+1
else deco:=deco(m,n-1)+deco(m-n,n)
end;
begin writeln(deco(30,30)); readln; end.
```

Контрольные примеры.

$\xi(10) = 42$, $\xi(20) = 627$, $\xi(30) = 5604$,

$\xi(10) = 37338$, $\xi(10) = 204226$.