

Размен монет.

Сколькими различными способами можно выдать сдачу размером W рублей, если есть монеты достоинством p_i ($i = 1, \dots, N$)? Для того чтобы сдачу всегда можно было выдать, будем предполагать, что в наборе есть монета достоинством 1 рубль ($p_1 = 1$).

Эта задача, так же как и задача о куче, решается только полным перебором вариантов, число которых при больших N очень велико. Будем использовать динамическое программирование, сохраняя в массиве решения всех задач меньшей размерности (для меньших N и меньшего числа монет).

В матрице T значение $T[i,w]$ будет обозначать количество вариантов сдачи размером w рублей (w изменяется от 0 до W) при использовании первых i монет из набора. Очевидно, что при нулевой сдаче есть только один вариант (не дать ни одной монеты), также и при наличии только одного типа монет (напомним, что $p_1 = 1$) есть тоже только один вариант. Поэтому нулевой столбец и первую строку таблицы можно заполнить сразу единицами. Таким образом, мы определили простые базовые случаи, от которых “отталкивается” рекуррентная формула.

Для примера мы будем рассматривать задачу для $w = 10$ и набора монет достоинством 1, 2, 5 и 10 рублей:

$p_i \backslash w$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1										
5	1										
10	1										

Теперь рассмотрим общий случай. Заполнять таблицу будем по строкам, слева направо. Для вычисления $T[i,w]$ предположим, что мы добавляем в набор монету достоинством p_i .

Если сумма w меньше, чем p_i , то количество вариантов не увеличивается, и $T[i,w] = T[i-1,w]$.

Если сумма больше p_i , то к этому значению нужно добавить количество вариантов с “участием” новой монеты. Если монета достоинством p_i использована, то нужно учесть все варианты “разложения” остатка $w-p_i$ на все доступные монеты, то есть $T[i,w] = T[i-1,w] + T[i,w-p_i]$.

В итоге получается рекуррентная формула

при $w < p_i$: $T[i,w] = T[i-1,w]$

при $w \geq p_i$: $T[i,w] = T[i-1,w] + T[i,w-p_i]$

$p_i \backslash w$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
5	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	10
10	1	1	2	2	3	4	5	6	7	8	11

Ответ к задаче находится в правом нижнем углу таблицы.

```
program Project1;
```

```
USES CRT;
```

```
CONST N=4;W=10;
```

```
VAR I,J,SUM:INTEGER;
```

```
P:ARRAY[1..N] OF BYTE;
```

```
T:ARRAY[1..N,0..W] OF WORD;
```

```
Begin P[1]:=1;
```

```
{OSTALN KAMNI - WWOD}
```

```
P[2]:=2;P[3]:=5;P[4]:=10;
```

```

{-----BASOW-ELEMENTU-----}
FOR I:=1 TO N DO FOR J:=0 TO W DO BEGIN T[I,0]:=1;T[1,J]:=1;END;
{-----SAPOLNENIE MASSIWA-----}
FOR I:=2 TO N DO FOR J:=1 TO W DO
  IF J<P[I] THEN T[I,J]:=T[I-1,J]
  ELSE T[I,J]:=T[I-1,J]+T[I,J-P[I]];
{-----}
  WRITELN('RESULTAT:',T[N,W] );
readkey ;
end.

```

Использование методов динамического программирования позволяет ускорить решение за счет хранения промежуточных результатов, однако требует дополнительного расхода памяти.